

第四章、极限定理

§4.1 大数定律

一、伯努利试验中的结论

- $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, $\sim B(1, p)$.
- 成功次数: $S_n = X_1 + \dots + X_n$.
- 成功频率: $Y_n = S_n/n$.
- $\forall \varepsilon > 0$, $A_n = A_{n,\varepsilon} = \{|\underbrace{Y_n - p}_{\text{波动}}| > \varepsilon\} = \{|S_n - ES_n| > n\varepsilon\}$,

$$P(A_n) \leq \frac{\text{Var}(S_n)}{(n\varepsilon)^2} = \frac{np(1-p)}{n^2\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- 定义4.1.1. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\underbrace{|\underbrace{X_n - \mu}_{\text{波动}}| > \varepsilon}) = 0$, $\forall \varepsilon > 0$, 则称 X_n 依概率收敛于 μ , 记为 $X_n \xrightarrow{P} \mu$.
- 例4.1.3. 四则运算.

二、大数定律及其证明

- 设 $X_1, X_2, \dots$ 是随机变量序列. 令

$$S_n := X_1 + \dots + X_n.$$

- 若存在实数序列 $a_1, a_2, \dots$ 与 $b_1, b_2, \dots$ 使得

$$a_n + b_n S_n \xrightarrow{P} 0,$$

则称 $X_1, X_2, \dots$ 服从(弱)大数定律(WLLN).

- 定理(大数定律): 若 $X_1, X_2, \dots$ 满足 **, 则 **.
- 常常考虑:

$$\frac{S_n}{n} - a_n \xrightarrow{P} 0 \quad \text{或} \quad \frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} a.$$

- 定理4.1.4. 设 $\underbrace{X_1, X_2, \dots}$ 独立同分布, 方差存在且有限, 则

$$\frac{1}{n}S_n \xrightarrow{P} \mu = EX_1, \quad (\text{即 } \frac{1}{n}(S_n - ES_n) \xrightarrow{P} 0)$$

- $\forall \varepsilon > 0, A_n = \{|S_n/n - \mu| > \varepsilon\} = \{|S_n - ES_n| > n\varepsilon\},$

$$P(A_n) \leq \frac{\text{Var}(S_n)}{(n\varepsilon)^2} = \frac{n\text{Var}(X_1)}{n^2\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

- 命题4.1.5. 设 $\underbrace{**}$ $\sup_n \text{Var}(X_n) < \infty$, 则 $\underbrace{**}$.
- 例4.1.6. 设 $\underbrace{A_1, A_2, \dots}$ 相互独立, S_n 为 $A_1, \dots, A_n$ 中发生的总次数, 则 $\underbrace{**}$.
- 命题4.1.7. 若 $\text{Var}(S_n) = o(n^2)$, 则 $\underbrace{**}$.

定理4.1.8. 设 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, $\lim_{x \rightarrow \infty} xP(|X_1| > x) = 0$, 则

$$\frac{1}{n}S_n - E(X_1 \cdot \mathbf{I}_{\{|X_1| \leq n\}}) \xrightarrow{P} 0.$$

- 方法: 截断 $X \rightarrow X \cdot \mathbf{I}_{\{|X| \leq M\}}$.
- 目标: 选 M_n , 用 T_n 取代 S_n .

$$T_n := X_1 \cdot \mathbf{1}_{\{|X_1| \leq M_n\}} + \dots + X_n \cdot \mathbf{1}_{\{|X_n| \leq M_n\}}.$$

- 一方面, 要求 $M_n \geq O(n)$, 以使得下式右边 $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

$$P(S_n \neq T_n) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^n \{|X_i| > M_n\}\right) \leq nP(|X| > M_n).$$

- 另一方面, 要求 $M_n \leq O(n)$. 故取 $M_n = n$.

- 另一方面, 要求 $M_n \leq O(n)$.

- 要求 $\star = o(n)$, 以得到WLLN.

$$P\left(\left|\frac{T_n - ET_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{\text{Var}(T_n)}{n^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{\text{Var}(X \cdot \mathbf{I}_{\{|X| \leq M_n\}})}{n}.$$

- $EX^2 \cdot \mathbf{I}_{\{|X| \leq M_n\}} \leq \int_0^{M_n} 2xP(|X| > x)dx = o(M_n).$

- 例3.1.30. $EX^2 \cdot \mathbf{I}_{\{|X| \leq a\}} = \int_0^\infty P(X^2 > y, |X| \leq a)dy$
 $= \int_0^a P(x < |X| \leq a)dx^2 \leq \int_0^a 2xP(|X| > x)dx.$

- 取 $M_n = n$, 记 $\mu_n = E(X \cdot \mathbf{I}_{\{|X| \leq n\}})$.

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu_n\right| \geq \varepsilon\right) \leq P(S_n \neq T_n) + P(\star) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

拓展:

例4.1.9(例3.2.9). n 张卡, 放回抽样. 为见 $[\alpha n]$ 张需抽取 $Y_n^{(\alpha)}$ 次.

- 已见 $k-1$ 张时, 为见到一张新卡, 还需抽取 X_k 次. $X_1 \equiv 1$.
为见 k 张, 需抽取 $S_k = X_1 + \cdots + X_k$ 次, $k = n$ 或 $k = [\alpha n]$.
- X_k 's 相互独立, $X_k \sim G(p_k)$, 其中 $p_k := \frac{n-k+1}{n}$.
- $EX_k = \frac{1}{p_k}$, $\text{Var}(X_k) = \frac{1-p_k}{p_k^2}$. $\sigma_k^2 = o(\mu_k^2)$:

$$\mu_k := ES_k = n\left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n-k+1}\right) \approx n \ln n \text{ 或 } n \ln \frac{1}{1-a},$$

$$\sigma_k^2 := \text{Var}(S_k) \leq n^2\left(\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{(n-k+1)^2}\right) = O(n^2) \text{ 或 } o(n^2).$$

- $\frac{S_k}{\mu_k} \xrightarrow{P} 1$:

$$P\left(\left|\frac{S_k}{\mu_k} - 1\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{S_k - \mu_k}{\mu_k}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma_k^2}{\varepsilon^2 \mu_k^2} \rightarrow 0.$$

例4.1.10. $\forall f \in C[0, 1], \exists$ 多项式序列 $f_1, f_2, \dots$ 使得 $f_n \xrightarrow{[0,1]} f$.

- 设 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, $\sim B(1, p)$, 则 $f\left(\frac{S_n}{n}\right) \approx f(x)$.
- $E_x f\left(\frac{S_n}{n}\right) \approx f(x)$,

$$f_n(x) := E_x f\left(\frac{S_n}{n}\right) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

- 记 $A_n := \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - x \right| \geq \delta \right\}$, $A_n^c = \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - x \right| < \delta \right\}$.

$$|f_n(x) - f(x)| \leq E|\star - \star| \cdot (\mathbf{I}_{A_n} + \mathbf{I}_{A_n^c}).$$

- $\star$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得 $|y - z| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(z)| \leq \varepsilon/2$.
- $\star$: $|\star - \star| \leq C := 2 \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$,

$$P(A_n) = P(|S_n - nx| \geq n\delta) \leq \frac{\text{Var}(S_n)}{(n\delta)^2} = \frac{nx(1-x)}{n^2\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

- $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{C}{4n\delta^2}.$

§4.2 强大数定律

一、伯努利试验中的结论

- $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, $\sim B(1, p)$.
- 成功次数: $S_n = X_1 + \dots + X_n \sim B(n, p)$.
- 成功频率: $Y_n = S_n/n$.
- $B = \left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(\omega) = p \right\}$. 目标: $\underline{P(B)} = 1$.
- $\omega \in B$: $\forall k \geq 1, \exists N \geq 1$ s.t. $\forall n \geq N, |Y_n(\omega) - p| \leq 1/k$.
 $\omega \notin B$: $\exists k \geq 1, \forall N \geq 1$ s.t. $\exists n \geq N, |Y_n(\omega) - p| > 1/k$.
- 记 $B_{n,k} = \{|Y_n - p| \leq 1/k\}$, $A_{n,k} = \{|Y_n - p| > 1/k\}$, 则

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} B_{n,k}, \quad B^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_{n,k}.$$

- $B = \left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(\omega) = p \right\}$, $A_{n,k} = \{|Y_n - p| > 1/k\}$,

$$B^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_{n,k}. \quad \text{目标: } \underbrace{P(B^c) = 0.}$$

- $P(A_{n,k}) = P\left(|S_n - np| > \frac{n}{k}\right) \leq \frac{k^4}{n^4} E(S_n - np)^4.$
- 例3.2.12. $W_i = X_i - p$. $\star\star = \sum_{i,j,k,\ell=1}^n EW_i W_j W_k W_\ell:$

$$EW_r^4, EW_r^3 W_s, EW_r^2 W_s^2, EW_r^2 W_s W_t, EW_r W_s W_t W_u.$$

- $EW_r^4 = pq^4 + q(-p)^4 = pq(p^3 + q^3)$, $EW_r^2 W_s^2 = (pq)^2.$
- 因此 $\star\star = npq(p^3 + q^3) + \underline{C_n^2 C_4^2} (pq)^2 \leq n + \underline{3n(n-1)} \leq 3n^2.$

- $B = \left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(\omega) = p \right\}, A_{n,k} = \{|Y_n - p| > \frac{1}{k}\},$

$$B^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_{n,k}, \quad P(A_{n,k}) \leq \frac{3k^4}{n^2}. \quad \text{目标: } \underline{P(B^c) = 0}.$$

- 关键点: $\sum_{n=1}^{\infty} P(|Y_n - p| > \frac{1}{k}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3k^4}{n^2} < \infty.$

- $P(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_{n,k}) \leq 3k^4 \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \forall k.$

- $P(B^c) = 0, P(B) = 1.$

- 定义4.2.1. 若 $\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}$ 几乎必然发生, 则称 X_n 几乎必然(以概率1)收敛于 X , 记为 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$.

- 注: X 可为广义随机变量, 称 X_n 几乎必然以 X 为极限.

- 例4.2.2. 四则运算.

二、强大数定律及其证明

- 设 $X_1, X_2, \dots$ 是随机变量序列. 令

$$S_n := X_1 + \dots + X_n.$$

- 若存在实数序列 $a_1, a_2, \dots$ 与 $b_1, b_2, \dots$ 使得

$$a_n + b_n S_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0,$$

则称 $X_1, X_2, \dots$ 服从强大数定律(SLLN).

- 定理(强大数定律): 若 $X_1, X_2, \dots$ 满足 **, 则 **.
- 常常考虑:

$$\frac{S_n}{n} - a_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0 \quad \text{或} \quad \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} a.$$

命题4.2.5. 设 $X_1, X_2, \dots$ 相互独立, $\sup_n E(X_n - EX_n)^4 < \infty$, 则

$$\frac{1}{n}(S_n - ES_n) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

- 不妨设 $EX_n = 0$. 往证 $\frac{1}{n}S_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$.
- 命题4.2.3. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) < \infty, \forall \varepsilon > 0$, 则 $\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \xi$.
- $P(|\frac{1}{n}S_n| > \varepsilon) \leq \frac{ES_n^4}{(n\varepsilon)^4}$.
- $S_n^4 = \sum_{i,j,k,\ell} X_i X_j X_k X_\ell$.

$$X_r^4, \quad X_r^2 X_s^2, \quad X_r^3 X_s, \quad X_r^2 X_s X_t, \quad X_r X_s X_t X_u.$$

- $EX_r^4 \leq M, EX_r^2 X_s^2 = (EX_r^2)(EX_s^2) \leq \sqrt{EX_r^4} \cdot \sqrt{EX_s^4} \leq M$
- $ES_n^4 \leq nM + C_n^2 C_4^2 M \leq 3n^2 M$, 故充分条件成立.

命题4.2.6. 设 $X_1, X_2, \dots$ 相互独立, $\sup_n \text{Var}(X_n) < \infty$, 则

$$\frac{1}{n}(S_n - \mathbb{E}S_n) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

- 不妨设 $\mathbb{E}X_n = 0$. 往证 $\frac{1}{n}S_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$.
- $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}S_n^2}{(n\varepsilon)^2} \leq \frac{C}{n\varepsilon^2}.$
- $\frac{S_{m^2}}{m^2} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$: $\mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_m}{m^2}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{C}{m^2\varepsilon^2}.$
- $\frac{\max_{1 \leq k \leq 2m} |S_{m^2+k} - S_{m^2}|}{m^2} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left|\frac{T_m}{m^2}\right| > \varepsilon\right) &\leq \sum_{k=1}^{2m} \mathbb{P}(|S_{m^2+k} - S_{m^2}| > m^2\varepsilon) \\ &\leq \sum_{k=1}^{2m} \frac{Ck}{m^4\varepsilon^2} \leq \frac{4C}{\varepsilon^2 m^2}. \end{aligned}$$

- 定理4.2.7. 设 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, EX_1 存在, 则

$$\frac{1}{n}S_n \xrightarrow{\text{a.s.}} EX_1.$$

- 定理4.2.22. 设两两独立, 同分布, EX_1 存在且有限.
- 推论4.2.23. 设两两独立, 同分布, EX_1 存在.

- $S_n = (X_1^+ + \dots + X_n^+) - (X_1^- + \dots + X_n^-).$
- 不妨设 $EX^+ = \infty, EX^- < \infty.$
- $Y_n^{(M)} = X_n^+ \cdot \mathbf{I}_{\{X_n^+ \leq M\}}, T_n^{(M)} = Y_1^{(M)} + \dots + Y_n^{(M)}.$
- 固定 $M \geq 1, \frac{1}{n}T_n^{(M)} \xrightarrow{\text{a.s.}} EY_1^{(M)}, (n \rightarrow \infty).$
- $\Omega_0 = \bigcap_{M=1}^{\infty} \Omega_M, \text{ 其中 } \Omega_M := \left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}T_n^{(M)}(\omega) = EY_1^{(M)} \right\}.$
- $\forall \omega \in \Omega_0,$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}T_n(\omega) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}T_n^{(M)}(\omega) = EY_1^{(M)} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \infty.$$

命题4.2.8. 设 $A_1, A_2, \dots$ 两两独立, $p_n = P(A_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty$, 则

$$\frac{\sum_{k=1}^n \mathbf{I}_{A_k}}{\sum_{k=1}^n p_k} \xrightarrow{\text{a.s.}} 1.$$

- $\mathbf{E}S_n = \sum_{k=1}^n p_k$, $\text{Var}(S_n) = \sum_{k=1}^n p_k(1 - p_k) \leq \mathbf{E}S_n$.

$$P\left(\frac{|S_n - \mathbf{E}S_n|}{\mathbf{E}S_n} > \varepsilon\right) \leq \frac{\text{Var}(S_n)}{\varepsilon^2(\mathbf{E}S_n)^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^2 \mathbf{E}S_n} \rightarrow 0.$$

- $\exists n_k \nearrow$ 使得 $k^2 \leq \mathbf{E}S_{n_k} < k^2 + 1$.

- 记 $T_k = S_{n_k}$, 则 $P\left(\frac{|T_k - \mathbf{E}T_k|}{\mathbf{E}T_k} > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 k^2}$.

- $\frac{T_k - \mathbf{E}T_k}{\mathbf{E}T_k} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$, 即 $\frac{T_k}{\mathbf{E}T_k} \xrightarrow{\text{a.s.}} 1$.

- 当 $n_k \leq n < n_{k+1}$ 时, $T_k(\omega) \leq S_n(\omega) \leq T_{k+1}(\omega)$.

例4.2.9. 设 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, F 连续. 记

$$A_1 = \Omega, \quad A_2 = \{X_2 > X_1\}, \quad A_n = \bigcap_{i=1}^{n-1} \{X_n > X_i\},$$

$$\text{则 } \frac{R_n}{\ln n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 1, \quad \text{其中 } R_n := \sum_{k=1}^n \mathbf{I}_{A_k}.$$

- $A_1, A_2, \dots$ 两两独立, $p_n = P(A_n) = \frac{1}{n}$.
- $ER_n = \sum_{k=1}^n p_k \approx \ln n$.
- 进一步, 令 $\tau_1 = 1$, $\tau_k(\omega) = \inf\{n > \tau_{k-1}(\omega) : \omega \in A_n\}$.
- $R_{\tau_k(\omega)}(\omega) = k$, $\tau_k(\omega) \geq k$. 因此 $k \rightarrow \infty \Rightarrow \tau_k(\omega) \rightarrow \infty$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\ln \tau_k(\omega)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{R_{\tau_k(\omega)}(\omega)}{\ln \tau_k(\omega)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n(\omega)}{\ln n}, \quad \text{故 } \frac{\ln \tau_k}{k} \xrightarrow{\text{a.s.}} 1$$

- $E\tau_2 = \infty$: $P(\tau_2 > n) = P(X_1 \geq X_2, \dots, X_1 \geq X_n) = 1/n$.

三、强大数定律的应用

- 例4.2.10. A 的频率 S_n/n 几乎必然收敛于概率 $p = P(A)$.
- 例4.2.11. X 的时间平均 S_n/n 几乎必然收敛于空间平均 EX .
- 例4.2.12. 设 $f \in C[a, b]$. 试估计 $\int_a^b f(x)dx$.

- 不妨设 $a = 0, b = 1$.
- 方法一、黎曼积分,

$$\frac{1}{n} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right) \approx \star.$$

- 方法二、设 $U_1, U_2, \dots$ 独立同分布, $\sim U(0, 1)$. 由SLLN,

$$\frac{1}{n} (f(U_1) + f(U_2) + \cdots + f(U_n)) \approx \star.$$

- 方法三、不妨设 f 取值于 $[0, 1]$. 设 $U_1, V_1, U_2, V_2, \dots$ 独立同分布, $\sim U(0, 1)$, 则由SLLN,

$$\frac{1}{n} (Y_1 + \cdots + Y_n) \approx \star, \quad \text{其中 } Y_i = \mathbf{I}_{\{V_i \leq f(U_i)\}}.$$

例4.2.13. $EZ = (EX) \cdot (EY_1)$, 其中 $Z = Y_1 + \cdots + Y_X$.

- 设 X 非退化; $Y_1 \geq 0$ a.s..
- 取 $X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布, 其中 $X_1 = X$.
- 记 $T_n = X_1 + \cdots + X_n$, $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$;

$$Z_n = Y_{T_{n-1}+1} + \cdots + Y_{T_n} = S_{T_n} - S_{T_{n-1}}.$$

- $Z_1, Z_2, \cdots$ 独立同分布:

$$P(Z_r \leq z_r, r = 1, \cdots, n) = \sum_{k'_r, s \geq 0} P(X_s = k_s, \forall s; S_{\ell_r} - S_{\ell_{r-1}} \leq z_r, \forall r).$$

- $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} EY_1, \frac{T_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} EX.$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_1(\omega) + \cdots + Z_n(\omega)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n(\omega)}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{T_n(\omega)}(\omega)}{T_n(\omega)} = (EX) \cdot (EY_1).$$

定理4.2.14. 设 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, 非负, $EX_1 > 0$. 令

$$\text{令 } N_t := \inf\{n \geq 1 : S_n > t\}, \quad \text{则 } \frac{N_t}{t} \xrightarrow{\text{a.s.}} \frac{1}{EX_1}.$$

- $N_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$: 记 $N_t(\omega) \nearrow N_\infty(\omega)$, 则

$$P(N_\infty \leq M) \leq P(N_t \leq M) \leq P(S_M > t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \quad \forall M \geq 1.$$

- $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_{N_t(\omega)}(\omega)}{N_t(\omega)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = EX_1$.
- 记 $n = N_t(\omega)$, 则 $S_{n-1}(\omega) \leq t < S_n(\omega)$. 因此

$$\frac{S_{n-1}(\omega)}{n} \leq \frac{t}{N_t(\omega)} < \frac{S_n(\omega)}{n} \Rightarrow \frac{t}{N_t(\omega)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} EX_1.$$

- 推论4.2.15 & 例4.2.16. 取非负整数值. 令

$$\text{令 } R_k := \max\{n \geq 0 : S_n \leq k\}, \quad \text{则 } \frac{R_k}{k} \xrightarrow{\text{a.s.}} \frac{1}{EX_1}.$$

例4.2.17. 设 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布. 令

$$F_n(\textcolor{red}{x}, \textcolor{blue}{\omega}) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{I}_{\{X_k(\omega) \leq x\}}.$$

- 固定 ω . $\forall n$, $F_n(\cdot, \omega)$ 是分布函数, 称为经验分布函数.
- 固定 x . $\forall n$, $F_n(x, \cdot)$ 是随机变量.
- 固定 $x \in \mathbb{R}$. $F_n(x, \cdot) \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathbf{E} \mathbf{I}_{\{X_1 \leq x\}} = F(x)$.
- 存在 Ω_0 使得 $P(\Omega_0) = 1$ 且 $\forall \omega \in \Omega_0$,

$$F_n(x, \textcolor{violet}{\omega}) \rightarrow F(x), \quad \forall x \in \mathbb{Q}.$$

- $F(s) \leftarrow F_n(s, \textcolor{violet}{\omega}) \leq F_n(x, \textcolor{violet}{\omega}) \leq F_n(r, \textcolor{violet}{\omega}) \rightarrow F(r)$. ($r, s \in \mathbb{Q}$)
- Glivenko 定理: $\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x, \textcolor{violet}{\omega}) - F(x)| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$.

§4.3 中心极限定理

一、伯努利试验中的结论

- $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, $\sim B(1, p)$.
- 成功次数: $S_n = X_1 + \dots + X_n$; 成功频率: $Y_n = S_n/n$.
- 标准化: $S_n^* = Y_n^* = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$.
- 局部极限定理(引理2.2.3, $p = 1/2$): $\forall a < b$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{k: a \leq x_k \leq b} \left| \frac{P(S_n = k)}{\phi(x_k) \Delta x_k} - 1 \right| = 0, \quad \text{其中 } x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

- $\forall a < b$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(a < S_n^* \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

- $P(S_n^* \leq x) \rightarrow \Phi(x), \quad \forall x:$

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow \infty} P(S_n^* \leq x) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} P(a < S_n^* \leq x) \\ &= \Phi(x) - \Phi(a) \xrightarrow{a \rightarrow -\infty} \Phi(x), \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} P(S_n^* > x) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} P(x < S_n^* \leq b) \\ &= \Phi(b) - \Phi(x) \xrightarrow{b \rightarrow \infty} 1 - \Phi(x).\end{aligned}$$

- 称 S_n^* 依分布收敛于 Z , 其中 $Z \sim N(0, 1)$.

二、独立同分布序列的中心极限定理

- 设 $X_1, X_2, \dots$ 是随机变量序列. 令

$$S_n := X_1 + \dots + X_n.$$

- 要求: $EX_n^2 < \infty$, $\text{Var}(X_n) > 0$, $\forall n$.
- 若

$$P(S_n^* \leq x) \rightarrow \Phi(x), \quad \forall x,$$

则称对于 $X_1, X_2, \dots$, 中心极限定理(CLT)成立.

- 定理(中心极限定理): 若 $X_1, X_2, \dots$ 满足 **, 则 **.
- 证明方法: 验证对应的特征函数点点收敛,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{S_n^*}(t) = e^{-t^2/2}, \quad \forall t.$$

定理4.3.4. 设 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, $\text{Var}(X_1) \in (0, \infty)$, 则

$$P(S_n^* \leq x) \rightarrow \Phi(x), \quad \forall x.$$

- 注4.3.5 (Berry-Esseen). 设 $E|X|^3 < \infty$, 则

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_{S_n^*}(x) - \Phi(x)| \leq 3 \frac{E|X^*|^3}{\sqrt{n}}.$$

- 不妨设 $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$. 记 $f_X = f$, 则

$$f_n(t) := Ee^{itS_n^*} = \left(Ee^{itX/\sqrt{n}}\right)^n = f(s)^n, \quad s = \frac{t}{\sqrt{n}}.$$

- 推论3.8.16.

$$f(s) = 1 - \frac{s^2}{2} + \varphi(s), \quad \text{其中 } \varphi(s) = o(s^2).$$

- 固定 t , 令 $n \rightarrow \infty$, 则

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

- $S_n^* = X_1/\sqrt{n} + X_2/\sqrt{n} + \cdots + X_n/\sqrt{n}.$
- $f_n(t) = f_{X/\sqrt{n}}(t)^n = f(s)^n.$
- 固定 t , 令 $n \rightarrow \infty$.

$$h(t) = \mathbb{E}e^{itX/\sqrt{n}}, \quad g(t) = \mathbb{E}e^{itZ/\sqrt{n}} = e^{-t^2/(2n)}.$$

- $f_n(t) = h(t)^n, \quad e^{-t^2/2} = g(t)^n.$
- $b^n - a^n = (a + (b-a)u)^n \Big|_0^1 = n(b-a) \int_0^1 (a + (b-a)u)^{n-1} du.$
- $\|f_n(t) - e^{-t^2/2}\| \leq n\|h(t) - g(t)\|.$
- $n\|h(t) - (1 - \frac{t^2}{2n})\| = n\|\varphi(\frac{t}{\sqrt{n}})\| = o(1).$
- $n\|g(t) - (1 - \frac{t^2}{2n})\| = o(1).$

三、中心极限定理的应用

- 近似认为

$$S_n^* := \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \sim N(0, 1), \quad S_n \sim N(n\mu, n\sigma^2), \quad \bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}).$$

- 近似认为

$$P(S_n \leq x) = P(S_n^* \leq x^*) = p, \quad x^* = \frac{x - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}, \quad p = \Phi(x^*).$$

- 三种应用.

- 例4.3.7. 选课人数 $S \sim P(100)$. 若 $S \leq 120$ 就开一个班; 否则分成两个班. 求分成两个班的概率.

- $n = 100$, $X \sim P(1)$. $P(S_n > 120.5) = P(S_n^* > 2.05) = 0.02$.

- 例4.3.8. 200 台机器, 每台需1 千瓦电功率, 有60% 的时间工作. 多少功率可保证电力不足的概率不高于0.14%?

- $n = 200$. $X \sim B(1, 0.6)$. $P(S_n > M) = 1 - \Phi(M^*) \leq 0.14\%$.
查表得 $M^* \geq 3$. 解得 $M \geq 141$.

- 例4.3.9. 为使调查结果与真实值(某观点的支持率 q , 未知)之间的误差不超过0.05 的概率至少为95%, 应调查多少人?

- $X \sim B(1, q)$. $P(|S_n/n - q| \leq 0.05) \geq 95\%$. 查表得 $\Phi(1.96) = 0.975$. 要求 $0.05\sqrt{\frac{n}{q(1-q)}} \geq 1.96$. 解得 $n \geq 385$.

§4.4 收敛性

一、依概率收敛

- $X_n \xrightarrow{P} X$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0, \quad \varepsilon > 0.$$

- 命题4.4.1. 设 $X_n \xrightarrow{P} X$ 且 $|X_n| \leq M$ a.s., $\forall n$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E|X_n - X| = 0. \quad (\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} EX_n = EX).$$

- $|X| \leq M$, a.s..
- $E|X_n - X|$

$$\begin{aligned} &= E|X_n - X| \cdot \mathbf{I}_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}} + E|X_n - X| \cdot \mathbf{I}_{\{|X_n - X| \leq \varepsilon\}} \\ &\leq 2M \cdot P(|X_n - X| > \varepsilon) + \varepsilon. \end{aligned}$$

二、几乎必然收敛

- $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$:

$\left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega) \right\}$ 几乎必然发生.

- $Y_1, Y_2, \dots$ 非负, $X_n = \sum_{k=1}^n Y_k \xrightarrow{\text{a.s.}} X := \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$.
 - Y_k 's 相互独立, $Y_n \sim P(\lambda_n)$, 则 $X_{\infty} \sim P(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n)$.
 - 例4.4.2. $\xi_1, \xi_2, \dots$ 独立同分布 $\sim B(1, p)$, $Y_n = \xi_n/2^n$, 则 $X \in [0, 1]$ a.s..
 - 反过来, 设 $\star$, 则 X 可二进制展开为 $\xi_1, \xi_2, \dots$.
- 命题4.4.3. $\star^c = \underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \left\{ |X_n - X| > \frac{1}{k} \right\}}_{\text{ }}$.

1. 博雷尔-康特立引理

- $A_1, A_2, \dots$ 是一列事件.
- 上极限与下极限:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} A_n.$$

- 例4.4.4. $\star^c = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n^c$.
- $\star = \{\omega : \forall N, \exists n \text{ 使得 } \omega \in A_n\} = \{\omega : \omega \text{ 属于无穷多个 } A_n\}$,
也记为 $\{A_n \text{ i.o.}\}$.
- 例4.4.5. 伯努利试验. $A_n =$ “第 n 个字符为H”, 则
 $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \{A_n \text{ i.o.}\}$: H 出现无穷多次的字符串;
 $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$: T 只出现有限多次的字符串, 为可列集.

命题4.4.7 (Borel-Cantelli引理). 设 $A_1, A_2, \dots$ 是一列事件.

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, 则 $P(A_n \text{ i.o.}) = 0$.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ 且 $A_1, A_2, \dots$ 相互独立, 则 $P(A_n \text{ i.o.}) = 1$.

• $\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n \searrow A := \{A_n \text{ i.o.}\}$, 故 $P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} P(\star)$.

• (1) $P(\star) \leq \sum_{n=N}^{\infty} P(A_n) \rightarrow 0$.

• (2) $\star^c = \bigcap_{n=N}^{\infty} A_n^c = \lim_{M \rightarrow \infty} \bigcap_{n=N}^M A_n^c$,

$$P(\star) = \prod_{n=N}^M (1 - P(A_n)) \leq \prod_{n=N}^M e^{-P(A_n)} = e^{-\sum_{n=N}^M P(A_n)},$$

• $1 - x \leq e^{-x}, x \geq 0$.

• $P(\star) = \lim_{M \rightarrow \infty} P(\star) \leq e^{-\sum_{n=N}^{\infty} P(A_n)} = 0, \forall N$.

0-1 律.

● 推论4.4.8. 若 $A_1, A_2, \dots$ 相互独立, 则 $P(A_n \text{ i.o.})$ 非0 即1.

● 反例4.4.9. $P(A) = 1/2, A_n \equiv A$.

● 例4.4.10. 设 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布. $\star = S_n/n$.

(1) 若 EX_1 不存在或发散, 则 $P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} |\star| = \infty\right) = 1$.

(2) 若 $\exists C \in \mathbb{R}$ 使得 $P(\lim_{n \rightarrow \infty} \star = C) > 0$, 则 $EX_1 = C$.

● 取定 M . 令 $A_n = \{|X_n| > 2Mn\}, n = 1, 2, \dots$ 相互独立.

● $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| > 2Mn) = \infty$, 故 $P(A_n \text{ i.o.}) = 1$.

● $A_n \subseteq B_n \cup B_{n-1}, B_n = \{|S_n| > Mn\}$.

● $\{A_n \text{ i.o.}\} \subseteq \{B_n \text{ i.o.}\} \subseteq \{\limsup_{n \rightarrow \infty} \star \geq M\}$. 故(1) $\checkmark$.

● 由正概率和(1) 知 EX_1 存在且有限. 故(2) $\checkmark$

2. 几乎必然收敛的验证方法

命题4.4.11. 记 $A_{n,\varepsilon} := \{|X_n - X| > \varepsilon\}$.

$X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ 当且仅当 $P\left(\underbrace{A_{n,\varepsilon} \text{ i.o.}}\right) = 0, \forall \varepsilon > 0$.

- $\hat{D}_\varepsilon = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_{n,\varepsilon}, P(\hat{C}_{N,\varepsilon}) \searrow P(\hat{D}_\varepsilon).$

- 当 $\varepsilon \searrow$ 时, $A_{n,\varepsilon}, \hat{C}_{N,\varepsilon}, \hat{D}_\varepsilon$ 都 $\nearrow$.

- 子列: 取 $\varepsilon = 1/k$. 命题4.4.3:

$$\left\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_{n,1/k}}_{\text{wavy line}}.$$

- $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ 当且仅当:

$$P(\hat{D}_{1/k}) = 0, \forall k; \quad P(\hat{D}_\varepsilon) = 0, \forall \varepsilon; \quad P(\hat{C}_{N,\varepsilon}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \forall \varepsilon.$$

- 推论(命题4.2.3). $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow **.$

推论4.4.12. 设 $X = X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, 则

$$EX_1 \text{ 存在且有限} \Leftrightarrow X_n/n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

- $\star$ 当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|X| > n\varepsilon) < \infty, \forall \varepsilon$. (推论3.1.19.)
- $A_n = \{|X_n/n| > \varepsilon\}, \mathbf{P}(A_n) = \star$.
- $A_1, A_2, \dots$ 相互独立, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \star < \infty \Leftrightarrow \underbrace{\mathbf{P}(A_n \text{ i.o.}) = 0, \forall \varepsilon > 0.}$$

- $\underbrace{\star\star} \Leftrightarrow X_n/n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$

3. 几乎必然收敛与依概率收敛

- 推论4.4.14. $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$.
 - $A_n = \{|X_n - X| > \varepsilon\}$, $P(A_N) \leq P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right)$.

- 例4.4.15. 设 $f, g \in C[0, 1]$, $g > 0$, $0 \leq f \leq Mg$. 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{g(x_1) + \cdots + g(x_n)} dx_1 \cdots dx_n.$$

- 取 $U_1, U_2, \dots$ 独立同分布, $\sim U(0, 1)$.
- $X_n = f(U_n)$, $Y_n = g(U_n)$,

$$\star = \mathbb{E}Z_n, \quad \text{其中 } Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{Y_1 + \cdots + Y_n}.$$

- $S_n/n \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}f(U_1)$, $T_n/n \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathbb{E}Y_1$. 因此

$$Z_n \xrightarrow{\text{a.s.}} c, \quad \text{故 } \mathbb{E}Z_n \rightarrow c, \quad \text{其中 } c = \frac{\mathbb{E}X}{\mathbb{E}Y} = \frac{\int_0^1 f(x) dx}{\int_0^1 g(x) dx}.$$

- 例4.4.16. $X_n \xrightarrow{P} X$ 不能推出 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$.
- 引理4.4.17. 若 $X_n \xrightarrow{P} X$, 则存在子列使得 $X_{n_k} \xrightarrow{\text{a.s.}} X$.

- $\forall k, P(|X_n - X| > 1/k) \rightarrow 0$.
- $\exists n_k > n_{k-1}$ 使得当 $n \geq n_k$ 时,

$$P(\star) < 1/2^k.$$

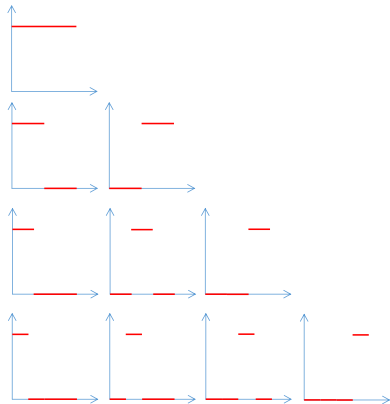
- 记 $Y_k = X_{n_k}$, 则 $\forall k \geq 1$,

$$P(|Y_k - X| > 1/k) < 1/2^k.$$

- $\forall \varepsilon > 0$, 记 $A_k = \{|Y_k - X| > \varepsilon\}$.
- 当 $1/k \leq \varepsilon$ 时, $A_k \subseteq \star$, 从而

$$P(A_k) \leq 1/2^k.$$

- $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty, \forall \varepsilon$.



引理4.4.19. $X_n \xrightarrow{P} X \Leftrightarrow \forall$ 子列, 存在其子列 $X_{n_{k_i}} \xrightarrow{\text{a.s.}} X$.

- $\Rightarrow, \checkmark$. $\Leftarrow$, 反证法.

- 设 $X_n \xrightarrow{P} X$ 不成立: $\exists \varepsilon > 0, \delta > 0$ 和子列 $n_1, n_2, \dots$ 使得

$$\underbrace{P(|X_{n_k} - X| > \varepsilon) > \delta, \quad k = 1, 2, \dots}$$

- 存在其子列 $n_{k_1}, n_{k_2}, \dots$ 使得 $X_{n_{k_i}} \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, 从而 $X_{n_{k_i}} \xrightarrow{P} X$.

- ** 与 ** 矛盾!

- 应用(例4.4.20). 设 $X_n \xrightarrow{P} X, Y_n \xrightarrow{P} Y$. 则 $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$.

- $\forall$ 子列 n_k 's, 取其子列 m_i 's 使得 $X_{m_i} \xrightarrow{\text{a.s.}} X$.

- 在取 m_i 's 的子列 r_j 's 使得 $Y_{r_j} \xrightarrow{\text{a.s.}} Y$.

- $X_{r_j} \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ 也成立. 因此 $X_{r_j} + Y_{r_j} \xrightarrow{\text{a.s.}} X + Y$.

三、依分布收敛

- 例4.3.2. $F_n(0) = 0, \quad F(0) = 1.$



$$x < 0: F_n(x) = F(x) = 0; \quad x > 0: F_n(x) \rightarrow F(x) = 1.$$

- $C(F)$: F 的连续点组成的集合, 可数集.
- 随机变量 X_n, X ; 分布函数 F_n, F ; 分布 μ_n, μ .
- 若 $F_n(x) \rightarrow F(x), \forall x \in C(F)$, 则称

(1) X_n 依分布收敛于 X , 记为 $X_n \xrightarrow{d} X$; (定义4.3.1)

(2) μ_n 弱收敛于 μ , 记为 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$; (定义3.8.18)

(3) 称 F_n 弱收敛于 F , 记为 $F_n \xrightarrow{w} F$. (定义3.8.17)

(注: 此处 F 可为准分布函数.)

- 例4.3.3., §4.6 习题4. 四则运算(Slutsky定理):

设 $X_n \xrightarrow{d} X, Y_n \xrightarrow{d} C$, 则

$$X_n + Y_n \xrightarrow{d} X_n + C; \quad X_n Y_n \xrightarrow{d} CX; \quad X_n / Y_n \xrightarrow{d} X/C.$$

例. 设 $\lambda_n \rightarrow \lambda$.

• $P(\lambda_n) \xrightarrow{w} P(\lambda)$:

• $p_k(\lambda_n) = \frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\lambda_n} \rightarrow p_k(\lambda), \forall k.$

• $\forall x$, 仅有有限个 k 满足 $k \leq x$.

• 注: 对于整数值分布列, $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ 当且仅当 $p_k^{(n)} \rightarrow p_k, \forall k.$

• 当且仅当 $\sum_k |p_k^{(n)} - p_k| \rightarrow 0$. (命题A.0.1, 例2.5.16).

• $\lambda = 0$: $X \equiv 0$.

• $\text{Exp}(\lambda_n) \rightarrow \text{Exp}(\lambda)$:

• $G_n(x) = e^{-\lambda_n x} \rightarrow e^{-\lambda x}, \forall x \geq 0.$

$G_n(x) \rightarrow 1, \forall x < 0.$

• $\lambda = 0$: $G(x) \equiv 1$, 为 $X \equiv \infty$ 的“尾分布函数”.

• $X \sim \text{Exp}(1)$, $\lambda_n \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{\lambda_n} X \rightarrow \infty$.

命题4.4.21. $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$.

又若 $X \equiv c$, 则 $\Leftarrow$ 成立. (一般情形, $\Leftarrow$ 不成立, 反例4.4.28.)

- 比较两个随机变量的分布函数:

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(Y \leq y, |Y - W| \leq \varepsilon) + P(Y \leq y, |Y - W| > \varepsilon) \\ &\leq P(W \leq y + \varepsilon) + \underbrace{P(|Y - W| > \varepsilon)}. \end{aligned}$$

- $\underline{P(X_n \leq x)} \leq P(X \leq x + \varepsilon) + \underbrace{P(|X_n - X| > \varepsilon)}.$

- $P(X \leq x - \varepsilon) \leq \underline{P(X_n \leq x)} + \underbrace{P(|X_n - X| > \varepsilon)}.$

- 令 $n \rightarrow \infty$, 再令 $\varepsilon \rightarrow 0$. $\forall x \in C(F)$,

$$F(x) \leftarrow F(x - \varepsilon) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq F(x + \varepsilon) \rightarrow F(x).$$

- 不妨设 $c = 0$.

$$P(X_n > \varepsilon) \rightarrow P(X > \varepsilon) = 0, \quad P(X_n \leq -\varepsilon) \rightarrow P(X \leq -\varepsilon) = 0.$$

例4.4.22. 设 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, $\sim N(0, 1)$, 则

$$Z_n := \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + \dots + X_n^2}} \xrightarrow{d} X_1.$$

- 固定 n . 取正交矩阵 $\mathbf{O}$, 第一行为 $(1/\sqrt{n}, \dots, 1/\sqrt{n})$.
- 令 $(Y_1, \dots, Y_n)^T := \mathbf{O}(X_1, \dots, X_n)^T$, 则

$$\vec{Y} \stackrel{d}{=} \vec{X}, \quad \star = \sqrt{n}Y_1, \quad \star = Y_1^2 + \dots + Y_n^2.$$

- $Z_n = \frac{Y_1}{\sqrt{\frac{1}{n}(Y_1^2 + \dots + Y_n^2)}} \xrightarrow{\text{a.s.}} Y_1?$
- $W_n := \frac{X_1}{\sqrt{\frac{1}{n}(X_1^2 + \dots + X_n^2)}} \xrightarrow{\text{a.s.}} X_1?$

命题4.4.29. 设 $X_n \xrightarrow{d} X$, 则存在随机变量序列 $Y, Y_1, Y_2, \dots$ 使得 $Y \stackrel{d}{=} X; Y_n \stackrel{d}{=} X_n, n = 1, 2, \dots$; 且 $Y_n \xrightarrow{\text{a.s.}} Y$.

- $F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}, U \sim U(0, 1),$
则 $F^{-1}(U)$ 以 F 为分布函数.
- $Y = F^{-1}(U) \stackrel{d}{=} X, Y_n := F_n^{-1}(U) \stackrel{d}{=} X_n.$
- $F_n^{-1}(u) \rightarrow F^{-1}(u), u \in C(F^{-1}).$
- $Y_n \xrightarrow{\text{a.s.}} Y.$
- 例. $X_n \xrightarrow{d} X$ 且 $|X_n| \leq M$ a.s., $\forall n$, 则 $EX_n \rightarrow EX.$

命题4.4.23. $X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} Ef(X_n) = Ef(X), \forall f \in BC(\mathbb{R})$.

- 注4.4.24. 用RHS 作为LHS 的定义.
- 定理3.8.19 & 3.8.20. 分布弱收敛当且仅当对应的特征函数点点收敛:

$$\mu_n \xrightarrow{w} \mu \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t), \quad \forall t.$$

- CLT: $S_n^* \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1)$.
- $(S_n - ES_n)/\sqrt{n} \xrightarrow{d} \sigma Z \sim N(0, \sigma^2)$, 含退化情形.
- 注4.3.6. 设 $\vec{X}^{(1)}, \vec{X}^{(2)}, \dots$ 独立同分布, 期望 $\vec{\mu}$ 与协方差 Σ 均存在且有限, 则 $(\vec{S}_n - n\vec{\mu})/\sqrt{n}$ 依分布收敛于 $\vec{X} \sim N(\vec{0}, \Sigma)$.

证明 $X_n \xrightarrow{d} X \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} Ef(X_n) = Ef(X), \forall f \in BC(\mathbb{R})$.

- $|f(x)| \leq M$. 取 a 使得

$$\pm a \in C(F), \quad P(X \notin I), \quad P(X_n \notin I) < \frac{\varepsilon}{5M}, \quad I = [-a, a].$$

- $|Ef(X_n) - Ef(X_n)\mathbf{I}_{\{X_n \in I\}}|, |Ef(X)\mathbf{I}_{\{X \in I\}} - Ef(X)| \leq \varepsilon/5$.
- 取 δ 使得 $x, y \in I, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{5}$.
- 取 $x_1, \dots, x_{K-1} \in I \cap C(F_X)$ 使得 $|x_i - x_{i-1}| < \delta, \forall i$.
- 令 $g(x) := f(x_i), x_{i-1} < x \leq x_i; g(x) := 0, x \notin I$.
- $|f(x) \cdot \mathbf{I}_{\{x \in I\}} - g(x)| \leq \varepsilon/5, \forall x$.
- $Ef(X_n)\mathbf{I}_{\{X_n \in I\}} \rightarrow Eg(X_n) \rightarrow Eg(X) \rightarrow Ef(X)\mathbf{I}_{\{X \in I\}}$. 故

$$|Ef(X_n) - Ef(X)| \leq |Eg(X_n) - Eg(X)| + 2\varepsilon/5 + 2\varepsilon/5.$$

- 令 $n \rightarrow \infty$, 再令 $\varepsilon \rightarrow 0$.

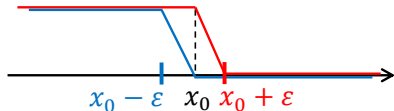
证明 $X_n \xrightarrow{d} X \Leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} Ef(X_n) = Ef(X), \forall f \in BC(\mathbb{R})$.

- $\forall x_0 \in C(F)$,

$$f_\varepsilon(x) \leq \mathbf{I}_{(-\infty, x_0]}(x) \leq g_\varepsilon(x).$$

- $Ef_\varepsilon(X_n) \leq F_n(x_0) \leq Eg_\varepsilon(X_n)$.

- 令 $n \rightarrow \infty$.



$$Ef_\varepsilon(X) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x_0) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x_0) \leq Eg_\varepsilon(X).$$

- 令 $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$Ef_\varepsilon(X) \geq F(x_0 - \varepsilon) \rightarrow F(x_0), \quad Eg_\varepsilon(X) \leq F(x_0 + \varepsilon) \rightarrow F(x_0).$$

例4.4.25 & 4.4.26. $\xi_1, \xi_2, \dots$ 取值0 或1.

- $X_n := \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i}{2^i} \xrightarrow{\text{a.s.,d}} X = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i}{2^i}.$

- $X \sim U(0, 1)$ 当且仅当

ξ_i 's 独立同分布, $\sim B(1, \frac{1}{2}).$

- 设 $**$, $\sim B(1, p)$, $p \neq 1/2$,
则 X 是奇异型的.

- $W_n = \sum_{i=1}^n \frac{2\xi_i}{3^i} \xrightarrow{\text{a.s.,d}} W = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\xi_i}{3^i}.$

- 设 $**$, $**$,

则 W 服从Cantor分布,
是奇异型的.

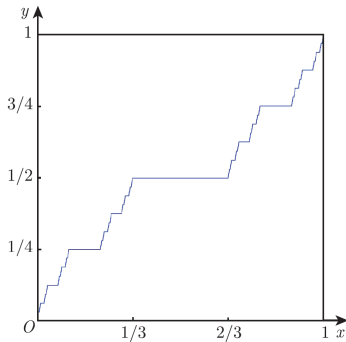


图 4.1

例4.4.30. 设 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, $\sim \text{Exp}(1)$.

记 $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, 则

$$\frac{M_n}{\ln n} \xrightarrow{\text{d,P}} 1, \quad M_n - \ln n \xrightarrow{\text{d}} Y.$$

- $P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x)^n = (1 - e^{-x})^n$.
- $G(x) = O(1/n)$, 即 $x = \ln n + O(1)$, 以使得RHS 有极限.
- 取 $x = \alpha \ln n$, 则 $e^{-x} = n^{-\alpha}$. 于是

$$P(\star \leq \alpha) = (1 - \frac{1}{n^\alpha})^n \rightarrow \begin{cases} 1, & \alpha > 1, \\ 0, & \alpha < 1. \end{cases}$$

- 取 $x = \ln n + y$, 则 $e^{-x} = e^{-y}/n$. 于是

$$P(M_n - \ln n \leq y) = \left(1 - \frac{e^{-y}}{n}\right)^n \rightarrow e^{-e^{-y}} = F_Y(y).$$

- 称 Y 服从Gumbel 分布/重指数分布.

四、均方收敛与平均收敛

- $r > 0$. L^r 是线性空间.

$$L^r := \{X : E|X|^r < \infty\}.$$

- 定义4.4.33. 设 $X, X_n \in L^r$. 若 $E|X_n - X|^r \rightarrow 0$, 则称 X_n 依 r 阶平均收敛/依 L^r 收敛到 X , 记为 $X_n \xrightarrow{L^r} X$.
- $r = 2$. 依 L^2 收敛/均方收敛.
- L^r 距离:

$$d_r(X, Y) := \begin{cases} (E|X - Y|^r)^{1/r}, & r \geq 1, \\ E|X - Y|^r, & 0 < r < 1. \end{cases}$$

- 有界收敛定理: 若 $X_n \xrightarrow{P} X$, $|X_n| \leq M$, a.s., 则 $X_n \xrightarrow{L^1} EX$.

- $X_n \xrightarrow{L^r} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$:

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq E \left(\frac{|X_n - X|}{\varepsilon} \right)^r \rightarrow 0$$

- 例4.4.34. 反之不然.

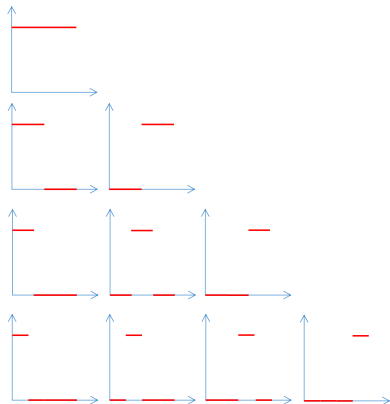
例. $\star$ 且 $E|X_n|^r \rightarrow E|X|^r \Rightarrow \star$.

例. $X_n \xrightarrow{L^r} X$ vs $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$.

- $r \geq 1$. $\|X\|_r := (E|X|^r)^{1/r}$.

- Hölder. $1/r + 1/s = 1$.

$$|EXY| \leq \|X\|_r \cdot \|Y\|_s.$$



林德贝格-费勒(Lindeberg-Feller)定理

- 设 $X_1, X_2, \dots$ 相互独立, $\mu_n := \mathbb{E}X_n$, $\sigma_n^2 := \text{Var}(X_n)$ 均存在且有限, 且 $\sigma_n^2 > 0$. 记

$$B_n^2 := \text{Var}(S_n) = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2.$$

- $$S_n^* = \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{B_n} = \sum_{k=1}^n \frac{X_k - \mu_k}{B_n}.$$

- Lindeberg条件: $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} Y_{nk}^2 \mathbf{I}_{\{|Y_{nk}| > \varepsilon\}} = 0, \quad \text{其中 } Y_{nk} = \frac{X_k - \mu_k}{B_n}.$$

- Feller条件:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n}{B_n} = 0.$$

- 定理4.3.19. ★成立当且仅当★和CLT同时成立.
- Liapunov条件: $\exists \delta > 0$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} |X_k - \mu_k|^{2+\delta} = 0,$$

- 推论(定理4.3.10). ★成立, 则CLT成立.

$$\bullet \quad \star \Rightarrow \star: p = (2 + \delta)/2, q = (2 + \delta)/\delta,$$

$$\mathbb{E} Y_{nk}^2 \mathbf{I}_{\{|Y_{nk}| > \varepsilon\}} \leq \left(\mathbb{E} (Y_{nk}^2)^p \right)^{1/p} \left(\mathbb{E} (\mathbf{I}_{\{|Y_{nk}| > \varepsilon\}})^q \right)^{1/q} \leq \left(\mathbb{E} |Y_{nk}|^{2p} \right)^{1/p}.$$

例4.3.17. 令 $\sigma_1 = 1$, $\sigma_n := \textcolor{red}{n}(\sigma_1 + \cdots + \sigma_{n-1})$, $\lambda_k = 1/\sigma_k$.

设 $X_1, X_2, \cdots$ 相互独立, $X_k \sim \text{Exp}(\lambda_k)$, 则CLT 不成立.

- Feller 条件不成立:

$$\mathbb{E}X_k = \sigma_k, \quad \text{Var}(X_k) = \sigma_k^2; \quad B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2; \quad \frac{\sigma_n}{B_n} \rightarrow 1.$$

- $\frac{\mathbb{E}S_n}{B_n} = \frac{\textcolor{blue}{\star} + \sigma_n}{B_n} = \left(1 + \frac{1}{\textcolor{red}{n}}\right) \cdot \frac{\sigma_n}{B_n} \rightarrow 1.$

- $\frac{S_{n-1}}{B_n} \xrightarrow{\text{P}} 0$: $\text{P}\left(\frac{S_{n-1}}{B_n} \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\mathbb{E}S_{n-1}}{B_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$

- $\frac{\textcolor{blue}{X}_n}{B_n} \xrightarrow{\text{d}} Y \sim \text{Exp}(1)$: $\textcolor{blue}{\star} \sim \text{Exp}\left(\frac{B_n}{\sigma_n}\right) \xrightarrow{\text{w}} \text{Exp}(1).$

- $S_n^* \xrightarrow{\text{d}} Y^* = Y - 1$:

$$S_n^* = \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{B_n} = \frac{X_n}{B_n} + \frac{S_{n-1}}{B_n} - \frac{\mathbb{E}S_n}{B_n} \xrightarrow{\text{d}} Y - 1.$$

例4.3.18. 设 $X_1, X_2, \dots$ 相互独立, $X_k \sim P(k^{-2})$, 则CLT 不成立.

- Feller 条件不成立:

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

- $S_n \sim P(B_n^2) \xrightarrow{w} P(C).$
- $S_n^* \xrightarrow{d} S_{\infty}^*$, 其中 $S_{\infty} \sim P(C).$